

Exercice 1 :

PARTIE I

Soit f la fonction définie sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Limites

(a) **Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.**

$f(x)$ étant une fraction rationnelle, on peut écrire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(b) **Calculer la limite de la fonction f quand x tend vers 4.**

$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 2x - 8 = 4^2 + 2 \times 4 + 8 = 16 + 8 - 8 = 16$ et $\lim_{x \rightarrow 4} x - 4 = 4 - 4 = 0$. Il faut donc étudier le signe de $x - 4$ pour pouvoir conclure. :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x - 4$	-	0	+

On en conclut que $\lim_{x \rightarrow 4^-} x - 4 = 0^-$ et donc que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 4^+} x - 4 = 0^+$ et donc $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$.

2. Dresser le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$.

D'après le tableau de signes proposé et les limites calculées, on en déduit que :

x	0	4	8	$+\infty$
$f'(x)$	0 -		- 0 +	
$f(x)$	2		$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	18	

3. Asymptotes

(a) **Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 6)$**

$$f(x) - (x + 6) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4} - \frac{(x + 6)(x - 4)}{x - 4} = \frac{x^2 + 2x - 8 - (x^2 + 2x - 24)}{x - 4} = \frac{16}{x - 4}$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 4} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 = +\infty$.

(b) **Donner les équations de toutes les asymptotes (éventuelles) à la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Comme $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$, on en déduit que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale

à $\mathcal{C}_f$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 4} = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(c) **Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x + 6$.**

Il faut pour cela étudier le signe de $f(x) - (x + 6)$ donc de $\frac{16}{x - 4}$. Or, $\frac{16}{x - 4}$ est du même signe que $x - 4$. Donc, $f(x) - (x + 6) < 0$ pour $x \in [0; 4[$ et $f(x) - (x + 6) > 0$ pour $x \in]4; +\infty[$.
On en conclut que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote sur $[0; 4[$ et au-dessus sur $]4; +\infty[$.

4. La courbe est à la fin, avec les deux fonctions f et g .

PARTIE II

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Limites

- (a) **Déterminer la limite de g en $-\infty$.**

Comme g est une fonction rationnelle, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$.

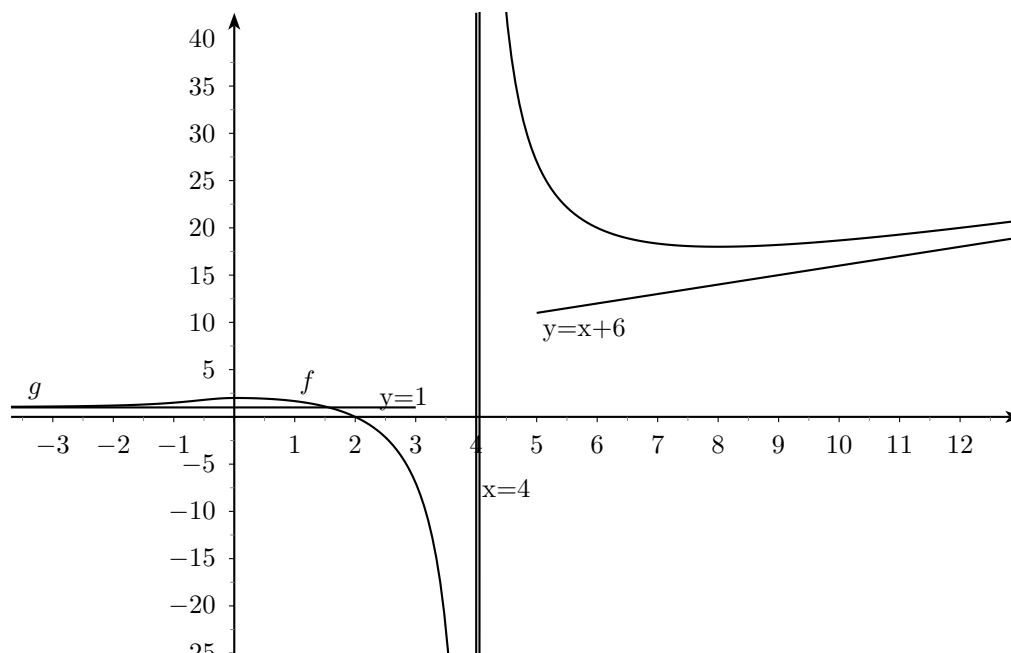
- (b) **Etudier la limite de g en 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1} = 2$$

- (c) **En déduire les équations des asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_g$.**

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, on en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.

- (d) Courbe :



PARTIE III

La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$?

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, on en déduit que la fonction h est continue en $x = 0$. De plus, g et f sont deux fonctions rationnelles, donc continues sur leur ensemble de définition, à savoir $] -\infty; 0[$ pour g et $[0; 4[\cup]4; +\infty[$ pour f . Donc, on en déduit que h est continue partout où f et g le sont, donc en tout $x \neq 4$. h est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Exercice 2 :

Soit $P : x \mapsto 16x^3 - 28x^2 + 9$ une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

1. **Dresser le tableau complet des variations de P .**

$P'(x) = 48x^2 - 56x = 8x(6x - 7)$. On en déduit donc le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$8x$	$-$	0	$+$	$+$
$6x - 7$	$-$	$+$	0	$+$
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
P	$-\infty$	9	$-\frac{100}{27}$	$+\infty$

Comme $P(x)$ est une fonction polynôme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 16x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 16x^3 = +\infty$$

2. **Justifier que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.**

La fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et est strictement croissante sur $[-1; 0]$. De plus, $P(-1) = -35$ et $P(0) = 9$. Donc, $-35 < 0 < 9$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

3. **Justifier que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; \frac{7}{6}]$.**

La fonction P est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{7}{6}]$. De plus, $P(0) = 9$ et $P(\frac{7}{6}) = -\frac{100}{27}$. Donc, $-\frac{100}{27} < 0 < 9$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; \frac{7}{6}]$.

4. **L'équation $P(x) = 0$ admet-elle une autre solution ? Si oui, précisez dans quel intervalle.**

Sur $[\frac{7}{6}; +\infty[$, $P(x)$ prend des valeurs négatives et positives. L'équation $P(x) = 0$ admet donc nécessairement au moins une autre solution dans cet intervalle.

5. **Trouver les valeurs de ces solutions.**

Par encadrements, on obtient les valeurs exactes des solutions : $x = -0,5$ ou $x = 0,75$ ou $x = 1,5$.

Exercice 3 :

L'objectif de l'exercice est de déterminer s'il peut être utile d'augmenter la vitesse sur autoroute afin de lutter contre les embouteillages.

On peut démontrer que le nombre moyen de véhicules passant sur une voie de circulation en une minute en un certain point est donné par :

$$N(v) = \frac{150v}{36 + 5v}$$

où v est la vitesse moyenne des véhicules ($v \in [0; +\infty[$)

1. **Combien de véhicules roulant à 110km/h peuvent passer par ce point en une heure ? (On arrondira le résultat à l'unité)**

On calcule $60 \times N(110)$ et on arrondit le résultat à l'unité. On obtient donc environ 1689 véhicules passant par ce point en une heure.

2. **Dresser le tableau de variations complet de la fonction N .**

Comme d'habitude, on dérive : N est de la forme $\frac{u}{v}$ donc, pour tout $v \in [0; +\infty[$,

$$N'(x) = \frac{150(36 + 5v) - 5(150v)}{(36 + 5v)^2} = \frac{5400}{(36 + 5v)^2}$$

Ici, N' est toujours positif, donc, la fonction N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $N(0) = 0$ et comme N est une fonction polynôme, $\lim_{v \rightarrow +\infty} N(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{150v}{5v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{30}{1} = 30$. On

obtient alors le tableau suivant :

v	0	$+\infty$
$N(v)$	0	30

3. **Comment évolue le nombre de véhicules passant par ce point lorsque la vitesse augmente ?**

Le nombre de voiture passant en ce point en une minute ne cesse de croître sans pour autant pouvoir dépasser 30 véhicules par minute.

4. **On essaye maintenant de quantifier l'augmentation du trafic possible en augmentant la vitesse.**

- (a) **Justifier que le nombre de véhicules passant en ce point ne peut dépasser 30 par minute.**

N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{v \rightarrow +\infty} N(v) = 30$. Donc, pour tout $v \in [0; +\infty[$, $N(v) < 30$.

- (b) **De quel pourcentage augmente le nombre de véhicules passant en une heure par ce point lorsqu'on augmente la vitesse de 110 à 130km/h ?**

On calcule $60 \times N(130)$ et on arrondit cette valeur. On obtient environ 1706 véhicules en une heure en roulant à 130 km/h. L'augmentation est donc de $100 \times \frac{1706 - 1689}{1689} \approx 1,01\%$.

- (c) **L'augmentation est-elle significative ?**

Entre 110 et 130 km/h, la vitesse augmente d'environ 18% pour un trafic supplémentaire d'environ 1%. Cette augmentation est donc loin d'être importante...